I Exemples de fonctions usuelles

1) Fonction exponentielle

Définition 1. On définit la série entière suivante sur $\mathbb{C}$:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 2. *(i) Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.*

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ et $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

(iii) $\exp$ est un morphisme de groupe surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

(iv) $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $\exp$ est sa propre dérivée.

Théorème 3. *La restriction de $\exp$ à $\mathbb{R}$ est positive et croissante, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.*

Application 4. *La restriction de la fonction $\exp$ à $\mathbb{R}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y$ avec $y(0) = 1$.*

2) Fonctions trigonométriques

Définition 5. On définit les séries entières suivantes sur $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proposition 6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.*

Proposition 7. *$\cos$ et $\sin$ sont holomorphes, $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.*

Proposition 8. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont réels.*

Corollaire 9 (Moivre)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Corollaire 10 (Euler)**.** *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application 11. *On peut exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$: ce sont les polynômes de Tchebychev.*

Proposition 12. *Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ et $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$.*

3) Fonctions hyperboliques

Définition 13. On définit les séries entières suivantes sur $\mathbb{C}$:

$$\cosh(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proposition 14. *Elles sont holomorphes, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.*

Proposition 15. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4) Fonctions réciproques dérivées

Théorème 16. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement croissante et dérivable, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est bijective de I sur $J = f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et vérifie :*

$$\forall\, y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 17. *L'exponentielle réelle donne $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.*

Exemple 18. *Le cosinus sur $]0, \pi[$ donne $\arccos :]-1, 1[\to]0, \pi[$, dérivable de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Exemple 19. *Le sinus sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donne $\arcsin :]-1, 1[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Exemple 20. *La tangente $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donne $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.*

Exemple 21. *Le cosinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$ donne $\operatorname{argch} :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$. On a $\operatorname{argch} : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.*

Exemple 22. *Le sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$ donne $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. On a $\operatorname{argsh} : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.*

Exemple 23. *La tangente hyperbolique $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ sur $\mathbb{R}$ donne $\operatorname{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$. On a $\operatorname{argth} : x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.*

II Fonctions spéciales à variables complexes

1) Fonction Γ d'Euler

Définition 24. La fonction Γ d'Euler est définie sur le demi-plan complexe $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par :

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{array} \right.$$

Proposition 25. *La fonction Γ est holomorphe sur P.*

Proposition 26. *(i) On a $\Gamma(1) = 1$.*

(ii) La fonction Γ vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour $z \in P$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Théorème 27. *La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont tous simples.*

2) Fonction ζ de Riemann

Définition 28. La fonction ζ de Riemann est définie sur le demi-plan complexe $G = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) > 1\}$ par :

$$\zeta : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array} \right.$$

Exemple 29. *On a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.*

Proposition 30. *La fonction ζ est holomorphe sur G.*

On s'intéresse maintenant aux propriétés de la restriction de ζ à $]1, +\infty[$.

Proposition 31. *La fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.*

Proposition 32. $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$, $\lim_{s\to1} \zeta(s) = +\infty$

Proposition 33. *$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o_{1^+}(1)$, où γ est la constante d'Euler.*

3) Applications

Définition 34. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit la loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\Gamma(a, \lambda)$, si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Proposition 35. *Soit $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$. Alors $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$.*

Proposition 36. *Soit $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$. Alors $\varphi_X : t \mapsto \frac{\lambda^a}{(\lambda - it)^a}$.*

Remarque 37. *L'hypothèse de Riemann dit : Les zéros de la fonction ζ qui ne sont pas des entiers négatifs sont de partie réelle $\frac{1}{2}$. Cette hypothèse à ce jour non démontrée forme un lien avec la répartition des nombres premiers.*

III Fonctions pathologiques

On parle de fonctions pathologiques pour désigner des fonctions particulières qui ont eu une importance historique dans leur introduction ou qui fournissent des contre-exemples a des propriétés que l'on pourrait naïvement considérer comme vraies.

(i) Fonction de Dirichlet : L'indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$, car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Il s'agit également d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann. De plus, la fonction $t \mapsto t\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t)$ est continue en un unique point : 0.

(ii) Fonction de Takagi : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $s(x) = d(x, \mathbb{Z})$. La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $[0, 1]$, et 1-périodique donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est cependant dérivable en aucun point.

(iii) La fonction $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, où $u_n : x \mapsto \frac{h(nx)}{2^n}$ et $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

(iv) La fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

(v) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ prolongée par 1 en 0 est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Riemann, mais pas au sens de Lebesgue.

(vi) La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0.

IV Transformée de Fourier

1) Généralités

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour $d \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 38. On définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx \end{array} \right.$$

Exemple 39. *Si $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\widehat{\gamma_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{\frac{1}{4a}}$.*

Proposition 40. *L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est bien définie, linéaire et continue.*

Théorème 41 (Riemann-Lebesgue)**.** $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$

Proposition 42. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{f * g}$.*

Proposition 43. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f_k : t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^{\mathbb{R}^d}(n)$ et on a $\widehat{f}^{(k)} = (-2i\pi)^k \widehat{f_k}$.*

Proposition 44. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \widehat{f}(\xi)$.*

2) Applications en probabilités

Définition 45. Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est la densité d'une loi de probabilité, appelée loi normale centrée réduite et notée $\mathcal{N}(0,1)$. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on notera $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ la loi de $Y = \sigma X + m$, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Proposition 46. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[Y] = m$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$.*

Définition 47. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$. On définit la fonction caractéristique φ_X de X par :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, X\rangle}\right] \end{array} \right.$$

Exemple 48. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.*

Remarque 49. *Si X a pour densité f, alors $\varphi_X = \check{\widehat{f}}$.*

Proposition 50. *φ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Proposition 51. *Si X est réelle et $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, alors φ_X est p fois dérivable et $\varphi_X^{(p)}(\lambda) = i^p \mathbb{E}\left[X^p e^{i\lambda X}\right]$. En particulier, $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$.*

Théorème 52 (Lévy)**.** *$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X$.*

Théorème 53 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

Application 54. *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de loi $\mathcal{B}(p)$ pour $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_i$. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0,1)$.

Développements

- Fonction Gamma (25,27) [Les14]
- Transformée de Fourier d'une gaussienne (39) [El 08]
- Théorème central limite et intervalle de confiance (53,54) [BL07]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[Rud09] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod
[Hau07] B. Hauchecorne. *Les Contre-exemples en Mathématiques.* Ellipses
[BL07] P. Barbe et M. Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences
[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses
[Les14] A. Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses